

ПЛАН РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

1. Найдите в условии ряд однотипных утверждений – развернутый или свернутый в предложение с переменной. Переменная может быть замаскирована. Тогда выявите ее, переделав формулировку условия. Если цепочки нет, попробуйте вырастить ее так, чтобы задача оказалась в ее составе.
2. Докажите первое утверждение ряда (базу индукции).
3. Докажите, что при каждом натуральном n из справедливости n -го утверждения ряда вытекает справедливость $(n + 1)$ -го утверждения (индукционный переход).
4. Если база и переход доказаны, то доказаны и все утверждения ряда, ибо до каждого из них можно прийти от базы шагами перехода.

Пример.

Условие:

У Пети есть детская пирамидка с n кольцами и два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что Петя сможет переложить все кольца на один из пустых стержней; он сможет это сделать за $2^n - 1$ перекладываний.

Решение:

1. Докажем, что для любого числа n Петя может переложить пирамидку за $2^n - 1$ ходов.
2. *База индукции.* Для $n=1$, очевидно, единственное кольцо можно переложить за одно действие.
3. *Индукционный переход.* Пусть мы доказали утверждение 1. для какого-то n . Докажем теперь то же утверждение при n на единицу больше. По индукционному предположению за $2^n - 1$ ходов можно переложить все кольца, кроме нижнего, на третий стержень. Затем нижнее переложим на второй. Потом за $2^n - 1$ ходов переложим все остальные кольца с третьего стержня на второй. Всего получится $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$ ходов. То есть мы доказали наше утверждение для n на один большего.
4. По методу индукции задача решена. Действительно, раз для $n=1$ переложить кольца получается, то используя индукционный переход, это получится для $n=2$, но тогда получится и для $n=3$ и т. д. Значит мы доказали, что Петя может переложить пирамидку за $2^n - 1$ ходов с первого стержня на второй вообще при любом n .