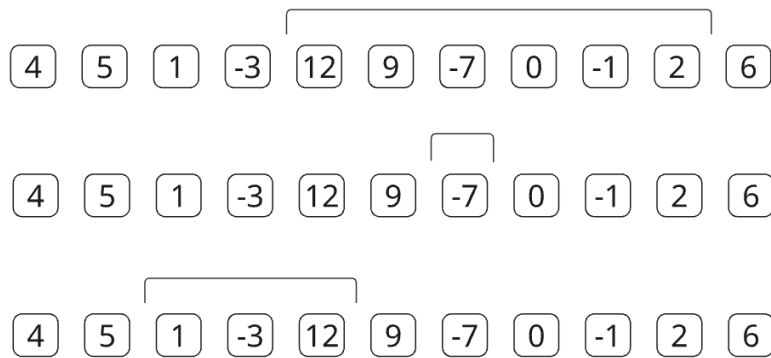


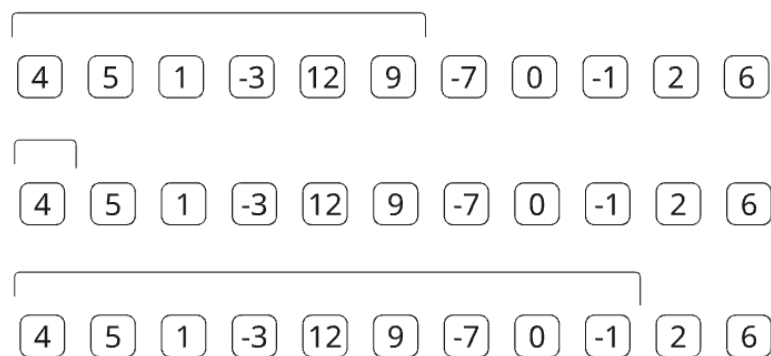
Максимальная сумма на подотрезке

Терминология

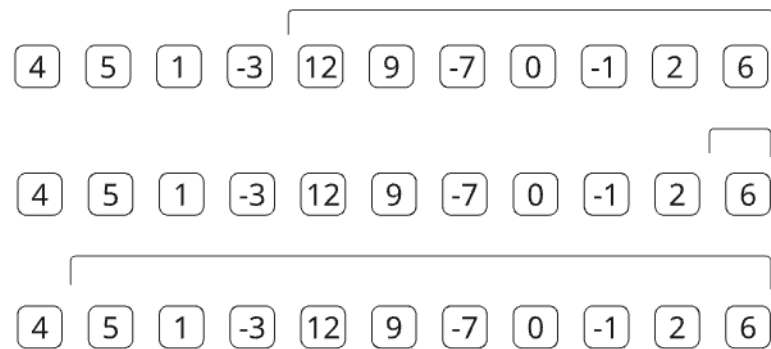
Подмассив — часть массива, непрерывный его кусок.



Префикс — частный случай подмассива, начинается с первого элемента.

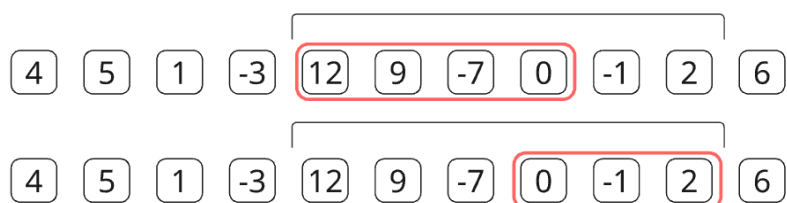


Суффикс — частный случай подмассива, заканчивается последним элементом.



Каждый из этих трёх объектов может быть пустым и всем массивом. Сумма элементов пустого подмассива обычно считается нулём (там нечего складывать).

Эти части массива часто комбинируются и понятно как называются: (например, префикс/суффикс подмассива)



Будем решать такую задачу: в заданном массиве целых чисел найти подотрезок с максимальной суммой.

Договоримся, что ответом будут значение такой суммы.

Можно решать чуть более сложный вариант и искать два числа: левую и правую границы такого отрезка (индексы). Если отрезков с максимальной суммой несколько, можно искать тот, что начинается левее остальных и имеет наименьшую длину.

Вам надо будет написать несколько решений этой задачи. В качестве дополнительного задания к каждому решению можно подумать, как реализовать его так, чтобы результатов была не сумма, а индексы начала и конца нужного подмассива.

Обозначим далее буквой N размер входного массива.

Например:

для массива 3 -1 -5 5 3 -6 ответ 3 4,

для массива 1 2 2 4 ответ 0 3.

Пусть «ответ» это подмассив с максимальной суммой. Несколько вопросов (приведите примеры, если ответ ДА):

- Могут ли быть в ответе отрицательные числа?
- Могут ли быть в ответе положительные и отрицательные числа?
- Могут ли быть в ответе *только* отрицательные числа? Сколько?
- Каково максимальное количество отрицательных чисел в ответе для массива длины N ?
- Пусть вам известен ответ (границы подотрезка $[L, R]$). Можно что-нибудь сказать про знаки элементов на концах этого подотрезка? знаки частичных сумм на префиксе и суффиксе этого подотрезка?

Для проверки ваших решений каждый вариант алгоритма надо оформить в виде функции. Затем сделайте массив из нескольких массивов-тестов. Это небольшие тесты, которые проверяют корректность решения на небольших массивах разных типов. Проверьте ваше первое решение и убедитесь, что оно даёт верный ответ.

После написания очередного варианта решения убедитесь, что оно даёт верные ответы на всех тестах.

A. Напишите решение с тремя циклами `for` за $O(N^3)$ (напишите, даже если знаете, как решать быстрее).

Указание: первый цикл перебирает всевозможные значения левой границы подотрезка, второй цикл перебирает для текущей левой границы всевозможные значения правой границы, третий цикл вычисляет сумму элементов на подотрезке.

B. Перепишите первое решение, используя функцию `combinations` из модуля `itertools` (сами найдите соответствующее место в документации) и встроенную функцию `sum` для вычисления суммы среза массива. В решении должен быть один цикл `for`, перебирающий то, что возвращает `combinations`.

Оцените максимальный размер массива, для которого первое и второе решение являются приемлемыми. Убедитесь, что на случайных массивах оба решения дают один и тот же ответ. Сравните время работы первого и второго решений на массивах максимального допустимого размера.

Префиксные суммы

Чтобы быстро считать сумму любого подотрезка массива A , создайте сначала массив с его *префиксными суммами*:

$\text{pref}[k]$ — сумма первых k элементов массива A .

Массив pref имеет длину на 1 бóльшую, чем массив A , $\text{pref}[0] = 0$.

Имея массив pref с префиксными суммами, легко найти сумму элементов любого подмассива при помощи одного вычитания.

A		4	5	1	-3	12	9	-7	0	-1	2	6
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
pref	0	4	9	10	7	19	28	21	21	20	22	28
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Например, чтобы посчитать сумму элементов с 4 индекса по 6 включительно, достаточно вычислить $\text{pref}[7] - \text{pref}[4]$ (выведите общую формулу).

C. Перепишите второе решение (задача B) и сравните время работы третьего и второго решений.

Два указателя

Теперь можно избавиться от анализа *всех* подмассивов. Идея в том, что при анализе текущего подмассива и элемента справа от него можно подвинуть левую или правую границу подмассива вправо на 1.

Ключевая идея: подмассив, имеющий максимальную сумму, не может иметь префикс¹ с отрицательной суммой².

D. Пусть сейчас проанализирован префикс массива из первых k элементов и вы храните L и R — границы текущего отрезка, который имеет шансы стать новым ответом или его префиксом.

Подумайте, как могут измениться L или R при рассмотрении элемента $A[k]$. Какие есть варианты?

Здесь полезно вспомнить последний вопрос из списка.

Перепишите решение с двумя указателями L и R и использованием массива с префиксными суммами. Это решение за $O(N)$.

E. Посмотрите на последнее решение и научитесь обходиться без массива префиксных сумм (как, зная сумму на подмассиве $[L, R]$, узнать сумму на подмассиве, где L или R увеличены на 1?).

Вы получите таким образом решение за $O(N)$ без дополнительной памяти.

Например, такое решение подойдёт для задачи, где надо получить максимальную сумму на подотрезке последовательности чисел неизвестной заранее длины.

¹ Суффикс такого подмассива тоже не может быть отрицательным, но это сейчас неважно. Нас интересует префикс, потому что элементы просматриваются слева направо.

² Придумайте массив, для которого это утверждение неверно и объясните, почему ничего страшного не произошло.