**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ТРЕМ ТОЧКАМ**

Клецко Л.A. , науч.рук. – Окулик Т.В., учитель математики

*ГУО «Гимназия №1 г. Жодино», Беларусь*

[*kletsko.06@mail.ru*](mailto:kletsko.06@mail.ru)*,* [*tatka\_vg@mail.ru*](mailto:tatka_vg@mail.ru)

Задачи на восстановление треугольника по трем точкам, связанными с этим треугольником, известны уже давно. Одной из первых печатных работ по восстановлению треугольника была статья Эйлера «Лёгкое решение одной трудной геометрической задачи», в которой были рассмотрены четыре точки: точки пересечении высот, медиан, биссектрис и центр описанной окружности треугольника. В 1982 году Вильям Верник расширяет список точек до 16 для восстановление треугольника по трем точкам: три вершины треугольника, основания высот, биссектрис, медиан, центр описанной окружности, центр вписанной окружности, точка пересечения медиан, точка пересечения высот. В список вошли 139 принципиально разных задач. Этот список получил название «Список Верника». Задачи из списка можно разделить на три основных класса: треугольник можно восстановить однозначно; треугольников существует бесконечно много; треугольник восстановить невозможно только с помощью циркуля и линейки. Задачи из списка Верника до сих пор находят свои решения. В 2015 году вышла статья С. А. Беляева [1], в которой автор привел решения разрешимых задач из списка Верника[2], классифицировал их по уровню сложности и методам решения.

В работе рассмотрены другие комбинации трех точек, среди которых три вершины треугольника, основания медиан, основания высот, биссектрис, медиан треугольника, центры вписанной и описанной окружностей, точки пересечения высот с описанной окружностью, точки пересечения биссектрис с описанной окружностью, точки пересечения биссектрис с вписанной окружностью, точки пересечения медиан с oписанной окружностью, центры вневписанных окружностей.

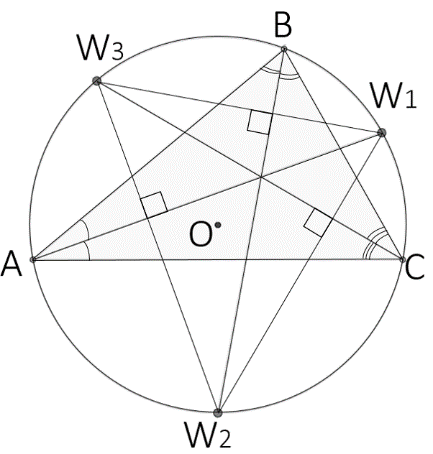
Общая постановка задач: Для остроугольного разностороннего треугольника отметили некоторые три точки, связанные с этим треугольником. Затем треугольник стерли, оставив только эти точки. С помощью циркуля и линейки восстановите треугольник по заданным точкам.

Гипотеза: существуют три точки, связанные с треугольником, по которым можно восстановить треугольник только с помощью линейки и циркуля.

Цель работы: рассмотреть наборы трех точек, по которым можно восстановить треугольник только с помощью линейки и циркуля.

Основные этапы исследования:

- изучение списка Верника по восстановлению треугольника по трем точкам;

- рассмотрение примеров других комбинаций трех точек для восстановления треугольника.

Примеры задач.

Задача 1. Восстановите треугольник по точкам пересечения биссектрис с описанной окружностью (W1,W2,W3).

Идея решения (Рисунок 1). Биссектрисы исходного ABC лежат на высотах W1W2W3. Тогда точки пересечения высот W1W2W3 с описанной окружностью – вершины исходного треугольника.

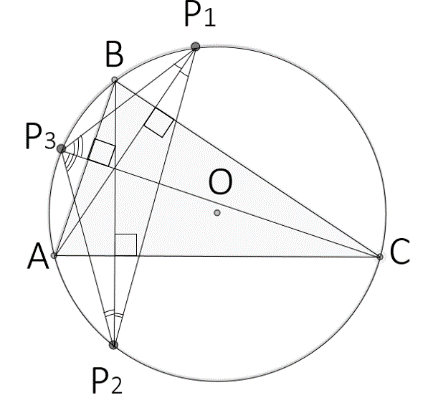
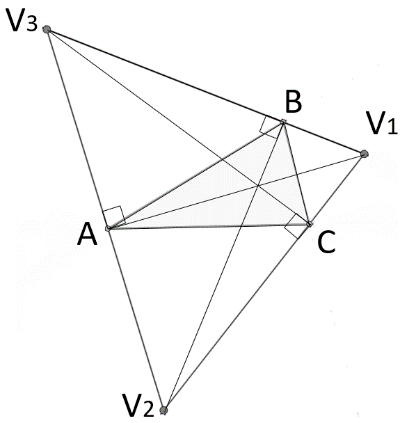
Задача 2. Восстановите треугольник по точкам пересечения высот с описанной окружностью (P1, P2, P3).

Рисунок 2

Рисунок 1

Идея решения (Рисунок 2). Высоты исходного ABC лежат на биссектрисах P1P2P3. Тогда точки пересечения биссектрис P1P2P3 с описанной окружностью – вершины исходного треугольника.

Задача 3. Восстановите треугольник по центрам вневписанных окружностей (V1, V2, V3).

Идея решения (Рисунок 3). ABC – орототреугольник V1V2V3. Тогда достаточно в V1V2V3  построить высоты, основания которых будут вершинами исходного треугольника.

Рисунок 3

Задача 4. Восстановите треугольник по центрам описанной, вписанной и одной из вневписанных окружностей треугольника ( O, I, V1).

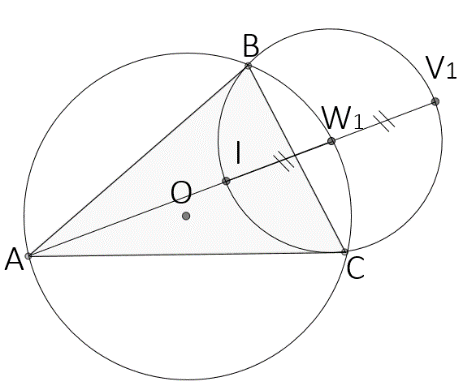
Идея решения (Рисунок 4). Для восстановления треугольника можно использовать лемму о трезубце, суть которой заключается в том, что точка пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC с описанной окружностью, точка W1, равноудалена от двух других вершин треугольника B и С, центра вневписанной окружности V1 и инцентра I. Тогда для восстановления треугольника находим точку W1, как середину отрезка IV1, строим окружности с центром в точке O и радиусом OW1 и с центром в точке W1 и радиусом W1I. Точки пересечения этих окружностей – две вершины треугольника ABC. Для нахождения вершины A продлеваем отрезок V1I до пересечения с окружностью с центром в точке О.

Рисунок 4

Результат: мы показали, что существуют другие комбинации трех точек, отличные от задач из списка Верника, по которым можно восстановить треугольник только с помощью циркуля и линейки.

Решение задач на восстановление треугольника способствуют установлению геометрических связей между точками треугольника и качественному усвоению геометрических фактов планиметрии в различных комбинациях.

Восстановление треугольника по трем точкам может быть применено и в практической деятельности человека, т.к. окружающий мир состоит в основном из многоугольников, а каждый многоугольник можно разбить на треугольники. Данная тема может быть применена при проектировании дорог с заданными условиями, в ландшафтном дизайне, при восстановлении сооружений, коммуникаций после стихийных бедствий.

Результатом исследования является составление дополнения к списку Верника,включающее 568 новых задач. Дальнейшая работа заключается в решении новых задач.

1. С. А. Беляев. *Матем. просвещение*,2015, **19**, 109–137.
2. W. Wernick. *Mathematics Magazine,* 1982, **55**, 227–230.