Решение вступительной олимпиады по математике. 7 класс. 2025

1. На доске написаны 42 числа: $1, 2, 3, \ldots, 42$. Катя хочет переставить числа в другом порядке так, чтобы сумма любых двух стоящих рядом чисел являлась простым числом. Возможно ли это?

Ответ: возможно.

Решение: Заметим, что числа, соседние с числом 42 (41 и 43), являются простыми. Будем записывать все четные числа в порядке убывания, а нечетные – в порядке возрастания, тогда сумма любых двух соседних чисел будет равна либо 41, либо 43:

$$42;\ 1;\ 40;\ 3;\ 38;\ 5;\ \ldots;\ 4;\ 39;\ 2;\ 41.$$

Возможны и другие примеры

2. Леша и Костя вышли из дверей ФТШ и устроили тренировку: Костя на роликах поехал по часовой стрелке вокруг здания ФТШ, а Леша побежал против часовой стрелки. Начали и закончили они одновременно, причем Костя успел проехать 80 кругов, а Леша пробежал только 20. Сколько длилась тренировка, если в процессе они встречались каждую минуту?

Ответ: 100 мин или 1 ч 40 мин.

Решение: Костя проехал в четыре раза больше кругов, значит скорость Кости в четыре раза больше. За время между двумя встречами Костя проезжает в четыре раза больше, чем Леша пробегает, а в сумме они сближаются на целый круг, значит Костя за это время проезжает $\frac{4}{5}$ круга, а Леша пробегает $\frac{1}{5}$ круга. Раз Леша за минуту пробегает $\frac{1}{5}$ круга, то весь круг он пробежит за 5 минут, а 20 кругов – за 100 минут.

3. На столе стоят одиннадцать одинаковых ящиков. В одном из них находится белый шарик, а в остальных - черные шарики. На некоторые ящики повесили таблички с надписями по следующим правилам (на ящике могло вообще не оказаться табличек или оказаться две и более табличек):
   - на все ящики, номера которых – четные числа: «В одном из соседних ящиков лежит белый шарик»
   - на все ящики, номера которых – простые числа: «В этом ящике лежит белый шарик»

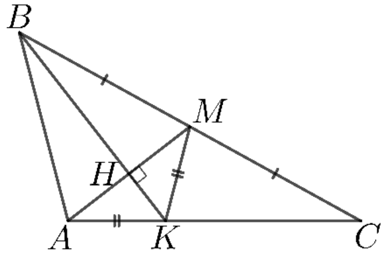
   Оказалось, что только одна надпись истинна, а все остальные ложны. На каком ящике находится табличка с истинной надписью?

Ответ: на ящике №2.

Решение: На ящиках №1 и №9 табличек нет, на ящике №2 – две таблички, на всех остальных – по одной табличке. Если шарик лежит в ящике, номер которого является нечетным простым числом (3, 5, 7, 11), то верны как минимум две надписи: на самом этом ящике и на одном из соседних четных. Если шарик лежит в ящике, номер которого является четным составным числом (4, 6, 8, 10), то все таблички ложны. Если шарик лежит в ящике №9, то верны таблички на ящиках №8 и №10. Таким образом, белый шарик может находиться только в ящиках №1 или №2. В каждом из этих случаев верна одна из табличек, висящих на ящике №2, а все остальные ложны.

4. AM – медиана треугольника ABC. На стороне AC нашлась такая точка K, что $BK \perp AM$ и $AK = KM$. Чему может быть равен периметр треугольника ABC, если известно, что длины всех сторон – целые числа и $AC = 3$.

Ответ: 9.



Решение: Пусть H – точка пересечения BK и AM, тогда KH – высота треугольника AKM. По условию $AK = KM$, значит KH является не только высотой, но и медианой, т.е. H – середина AM.

В треугольнике ABM BH также является высотой и медианой, значит треугольник равнобедренный, т.е. $AB = BM$. По условию, AM – медиана треугольника ABC, то есть $BC = 2BM = 2AB$.

По неравенству треугольника $BC - AB < AC < BC + AB$. Подставим в это неравенство известные нам данные: $2AB - AB < 3 < 2AB + AB$, откуда $1 < AB < 3$ и по условию AB – целое число. Тогда $AB = 2 \Rightarrow BC = 4 \Rightarrow P_{ABC} = 2 + 3 + 4 = 9$.

5. Таня называет четырехзначное число годным, если в результате вычитания из него его суммы цифр получается 2025. Сколько существует годных чисел?

Ответ: 10.

Решение: Сумма цифр четырехзначного числа не меньше 1 и не больше 36, значит все годные числа находятся в промежутке от 2026 до 2061, то есть их можно записать в виде $\overline{20ab} = 2000 + 10a + b$. Число является годным, если $2000 + 10a + b - 2 - 0 - a - b = 1998 + 9a = 2025$. Получаем, что $a = 3$, а b – любая цифра от 0 до 9. Таким образом, годными являются 10 чисел от 2030 до 2039 включительно.

6. Найдите все пары чисел a и b, для которых выполняется равенство $(a^6 + 1)(b^6 + 1) = 4a^3b^3$.

Ответ: $(1; 1)$ и $(-1; -1)$.

Решение: Пусть $a^3 = x$, $b^3 = y$, тогда:

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = 4xy \Leftrightarrow x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2xy = 0 \Leftrightarrow (xy - 1)^2 + (x - y)^2 = 0$$

Оба слагаемых в левой части неотрицательны, значит равенство возможно только если

$$\begin{cases} xy = 1, \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1, \\ x = y \end{cases}$$

то есть когда x и y либо оба равны 1, либо оба равны -1. Получаем, что либо $\begin{cases} a = 1, \\ b = 1 \end{cases}$, либо $\begin{cases} a = -1, \\ b = -1 \end{cases}$.