Решение вступительной олимпиады по математике. 8 класс. 2025

1. Один из корней уравнения $3x^2+5x+a=0$ равен 2. Найдите a и второй корень уравнения.

Ответ: $a=-22$ $x_2=-\frac{11}{3}$.

Решение1: Поскольку у уравнения есть корень, можно воспользоваться формулами Виета: $x_1+x_2=-\frac{5}{3}\Rightarrow$ $x_2=-\frac{5}{3}-2=-\frac{11}{3}$; $x_1x_2=\frac{a}{3}\Rightarrow a=3\cdot2\cdot\left(-\frac{11}{3}\right)=-22$.

Решение2: Так как $x_1=2$ – корень, то $3\cdot2^2+5\cdot2+a=0$. Откуда $a=-10-12=-22$.
При $a=-22$ уравнение принимает вид $3x^2+5x-22=0$, $D=5^2+4\cdot3\cdot22=25+12\cdot22=289$,
$x_1=\frac{-5+17}{2\cdot3}=2$; $x_2=\frac{-5-17}{2\cdot3}=-\frac{22}{6}=-\frac{11}{3}$.

2. Найдите наименьшее простое число, которое можно представить в виде суммы пяти различных простых чисел. Ответ объясните.

Ответ: 43.

Решение: Пусть среди слагаемых есть двойка. Тогда сумма пяти простых чисел – чётное число, большее 2, как сумма четырёх нечётных чисел и одного четного. Значит сумма – составное число, что противоречит условию.
Сумма пяти наименьших простых нечётных чисел равна $3+5+7+11+13=39$ – составное число. Заменим бóльшее из слагаемых на следующее простое число 17, тогда искомая сумма равна $3+5+7+11+17=43$ – простое число и новая сумма будет наименьшей, так как на 17 заменили наибольшее из слагаемых.

3. Известно, что x и y – различные числа, причем $(x-2024)(x-2025)=(y-2024)(y-2025)$. Какие значения может принимать выражение $x+y$?

Ответ: 4049.

Решение:

$$(x-2024)(x-2025)=(y-2024)(y-2025)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2024x-2025x+2024\cdot2025=y^2-2024y-2025y+2024\cdot2025\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2-2024x+2024y-2025x+2025y=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y)-2024\cdot(x-y)-2025\cdot(x-y)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\cdot(x+y-2024-2025)=0\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x-y=0,\\ x+y-4049=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y,\\ x+y=4049.\end{array}\right.$$

Так как по условию x и y – различные числа, то $x+y=4049$.

4. Индеец Костя плывёт на пирóге от деревни A до деревни B по реке в 3 раза дольше, чем от деревни B до деревни A. Во сколько раз дольше обычного Костя будет добираться из B до A на пирóге без вёсел?

Ответ: в 3 раза.

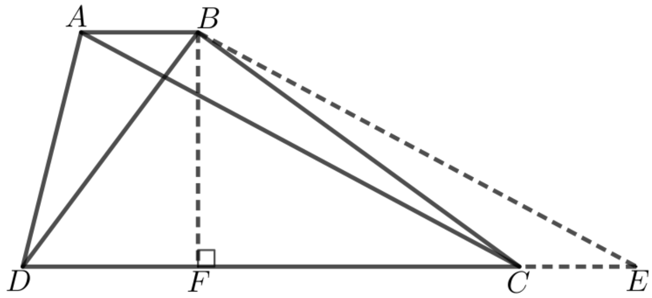
Решение:
Заметим, что деревня B находится выше по течению реки, чем деревня A. Обозначим скорость течения реки как x, а скорость пирóги в стоячей воде – как y. Если S – расстояние по реке от A до B, то из условия имеем:

$$3\cdot\frac{S}{y+x}=\frac{S}{y-x}\Leftrightarrow\frac{3}{y+x}=\frac{1}{y-x}\Leftrightarrow3\cdot(y-x)=y+x\Leftrightarrow3y-3x=y+x\Leftrightarrow2y=4x\Leftrightarrow y=2x.$$

Заметим, что скорость на пирóге против течения $y-x=2x-x=x$ совпадает со скоростью течения, значит и плыть из B в A на пирóге без вёсел Костя будет столько же времени, сколько плыл из A в B, то есть в три раза дольше обычного.

5. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 8, ее диагонали равны 17 и 10, а оба угла при большем основании острые.

Ответ: 84.



Решение: Пусть $ABCD$ – данная трапеция, в которой высота $BF = 8$, диагональ $DB = 10$, а диагональ $AC = 17$.
Проведём прямую через точку B параллельно AC, которая пересекает прямую DC в точке E.
Четырёхугольник $ABEC$ – параллелограмм (по определению), значит $AB = CE$.
По теореме Пифагора для прямоугольных треугольников ΔDBF и ΔEBF:
$DF^2 = DB^2 - BF^2 = 100 - 64 = 36$; $DF = 6$,
$FE^2 = BE^2 - BF^2 = 289 - 64 = 225$; $FE = 15$.
Заметим, что $S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2} \cdot BF = \frac{CE+CD}{2} \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot BF = S_{DBE}$.
Таким образом, $S_{ABCD} = S_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot (DF + FE) \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot (6 + 15) \cdot 8 = 21 \cdot 4 = 84$.

6. В футбольном турнире каждая команда сыграла с каждой командой по одному разу. Ровно треть команд хотя бы раз сыграла вничью, а ровно 75% оставшихся команд не обошлись без поражений. Сколько результативных матчей было сыграно на турнире?

Ответ: 14.
Решение: Заметим, что, так как по условию ровно треть команд хотя бы раз сыграла вничью, то без ничьих провели турнир $\frac{2}{3}$ команд, то есть это те команды, которые только выигрывали или проигрывали. Из условия следует, что $75\ \%$ от $\frac{2}{3}$ всех команд имели поражения. $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$, то есть ровно половина участвующих команд хоть раз, но проиграли. Команды, не имевшие ничьих и поражений, только побеждали, но поскольку каждая команда сыграла с каждой, то выиграть все игры могла только одна команда. С другой стороны, эта одна команда – это $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ от общего количества команд, значит в турнире участвовало 6 команд. Следовательно, ничья случилась только у двух команд, таким образом, эта ничья была единственной (в игре между ними). А значит все игры турнира, кроме одной, были результативными. Наконец, так как команд было 6, то было проведено $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ игр. А значит результативных игр было сыграно 14.