Решение вступительной олимпиады по математике. 9 класс. 2025

1. Приведите пример пяти несократимых обыкновенных дробей с положительными знаменателями, каждый из которых не равен 1, таких что произведение любых двух из них – целое число.

Ответ: $\frac{2\cdot3\cdot5\cdot7}{11}; \frac{2\cdot3\cdot5\cdot11}{7}; \frac{2\cdot3\cdot7\cdot11}{5}; \frac{2\cdot5\cdot7\cdot11}{3}; \frac{3\cdot5\cdot7\cdot11}{2}$.

Решение: Один из способов: возьмем пять различных простых чисел и сделаем пять различных дробей, в каждой из которых одно из взятых чисел находится в знаменателе, а произведение остальных четырех – в числителе. Произведение двух любых дробей – это дробь, у которой оба простых множителя из знаменателя встретятся в качестве множителей и в числителе, а значит после сокращения получится целое число.

2. Известно, что $(2025-x)(x-2024)=-1012$. Чему равно $(x-2025)^2+(x-2024)^2$?

Ответ: 2025.

Решение1: Пусть $a=2025-x, b=x-2024$. Тогда надо найти a^2+b^2 при условии, что $ab=-1012$. Заметим, что $a+b=1$. Тогда $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1+2\cdot1012=2025$.

Решение2: Обозначим $2025-x=t, x-2024=1-t$. Тогда $t(1-t)=-1012, t^2-t=1012$. Найдём (в новых обозначениях) $t^2+(1-t)^2=2(t^2-t)+1=2\cdot1012+1=2025$.

3. Цифры 1; 2; 3; 4 и 5 используются по одному разу в каком-то порядке для подстановки вместо букв в числовом выражении $\mathrm{M}^{\mathrm{a}^{\mathrm{t}^{\mathrm{h}^{\mathrm{s}}}}}$ (разным буквам соответствуют разные цифры, порядок возведения в степень – «сверху вниз», $3^{5^2}=3^{25}$, а не $(3^5)^2=3^{10}$). Сколько существует перестановок цифр, при которых десятичная запись выражения заканчивается цифрой 1?

Ответ: 34.

Решение: Если на месте M стоят 2, 4, 5, то последняя цифра будет не 1 (она либо 5, либо чётная). Если на месте M стоит 1, то при любой расстановке оставшихся цифр получится 1, таких вариантов $4!=24$.

Пусть $M=3$. Рассмотрим последние цифры степеней с основанием 3: $3^1=3, 3^2=9, 3^3=27, 3^4=81$, $3^5=243, \ldots$ Последние цифры повторяются для показателей с одинаковым остатком при делении на 4. Для получения 1 на конце нам нужны показатели, кратные четырём. Значит, $a=2$ или $a=4$. Если $a=4$, нас устраивает любая расстановка остальных цифр, т.е. $3!=6$ вариантов. Если $a=2$, то показатель над ней должен быть больше 1, только тогда получится число, кратное 4. Значит, в этом случае нужны все варианты перестановок цифр 1, 4, 5, в которых 1 не стоит на первом месте, то есть $2\cdot2\cdot1=4$ варианта. Всего перестановок $24+6+4=34$.

4. Решите неравенство: $\frac{65}{5-x}+\frac{121}{(x+2)(5-x)}\leq 25$.

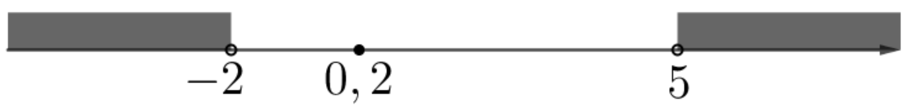
Ответ: $(-\infty;-2)\cup\{0{,}2\}\cup(5;+\infty)$.

Решение:

$$\frac{65}{5-x}+\frac{121}{(x+2)(5-x)}\leq 25 \Leftrightarrow \frac{65x+251}{(x+2)(5-x)}\leq 25 \Leftrightarrow$$

$$\frac{65x+251+25x^2-75x-250}{(x+2)(x-5)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{25x^2-10x+1}{(x+2)(x-5)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(5x-1)^2}{(x+2)(x-5)}\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup\{0{,}2\}\cup(5;+\infty)$$



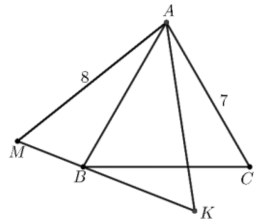
5. У Ани есть любимое число. Она написала шесть утверждений об этом числе и присвоила каждому из них номер. Три из этих утверждений верны, а три ложны. Утверждения выглядят следующим образом:
   1) Это составное число;
   2) Это нечётное число;
   4) Это число меньше, чем 30;
   8) Это однозначное число;
   16) Это число, заканчивающееся на цифру 9;
   32) Это число делится на 5.

   Аня утверждает, что её любимое число равно сумме **номеров** этих трёх истинных утверждений. Какое любимое число у Ани?

Ответ: 35.

Решение: Допустим, 1) ложно, тогда любимое число является суммой трех четных чисел, то есть четно и больше двух, а значит составное. Получаем противоречие, значит 1) истинно, тогда сумма единицы и двух четных – нечетное число, значит и 2) истинно. Переберём варианты:
$1 + 2 + 4 = 7$, но тогда 8) истинно. Противоречие.
$1 + 2 + 8 = 11$, но тогда 4) истинно. Противоречие.
$1 + 2 + 16 = 19$, но тогда 4) истинно. Противоречие.
$1 + 2 + 32 = 35$. Все условия выполнены: это число составное, нечетное, не меньше 30, не однозначное, не заканчивается на 9 и делится на 5. Значит, любимое число 35.

6. Треугольники ABC и AMK – равносторонние со сторонами 7 и 8 соответственно. Точка B лежит на отрезке MK (точки K и C по одну сторону от прямой AB как на рисунке). Найдите длину отрезка CK.



Ответ: 3 или 5.

Решение: Углы MAB и CAK равны, так как дополняют угол BAK до $60°$. Значит, треугольники MAB и KAC равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $CK = MB = x$. По теореме косинусов для треугольника AMB, в котором $\angle AMB = 60°$: $7^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 60° \Rightarrow\ x^2 - 8x + 15 = 0$, откуда $x = 3$ или $x = 5$. Оба варианта возможны, так как есть две точки на стороне MK на расстоянии 7 от вершины A.