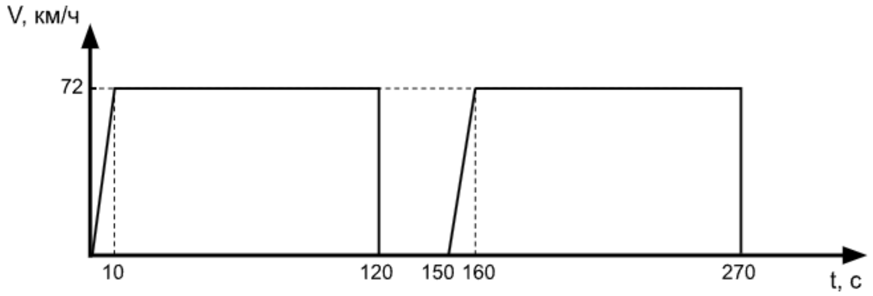
Решение вступительной олимпиады по физике. 7 класс. 2025

1. Движение в метро

Поезда длиной $l = 200$ м движутся между станциями метро, расстояние между всеми станциями одинаковое. По графику зависимости скорости поезда от времени:

А) определите среднюю скорость поезда при прохождении им всей линии метро;

Б) найдите минимальное возможное время между прибытиями поездов на станцию.



Ответ: А) 15,33 м/с, или $55{,}2\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. **Б)** 45 с.

Решение: А) Средняя скорость поезда за все время движения равна средней скорости на повторяющемся участке - например от 0 с до 150 с. Средняя скорость находится как $V_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{общ}}}{t_{\text{общ}}}$. Время движения – 150 с, переведем скорость в м/с: $72\,\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, и тогда пройденное расстояние найдем как площадь под участком графика $V(t)$: $S = 0{,}5 \cdot 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 10\text{ с} + 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 110\text{ с} = 2300\text{ м}$.

Тогда средняя скорость равна $\frac{2300\text{ м}}{150\text{ с}} \approx 15{,}33\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}}$ (или $55{,}2\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$).

Б) Минимальное время между прибытиями будет достигаться, если поезда во время своего движения подходят друг к другу максимально близко – между началом первого и концом второго поезда расстояние равно 0 в какой-то момент. Для такого движения минимальное расстояние между поездами будет в момент торможения догоняющего поезда. Получается, что в момент, когда первый поезд прибыл на станцию и затормозил, второй поезд успел проехать расстояние, равное своей длине. За 10 с разгона поезд проезжает $S_{\text{разгона}} = 0{,}5 \cdot 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 10\text{ с} = 100\text{ м}$, за следующие 5 с поезд проезжает ещё 100 м. Следовательно, между торможениями двух поездов проходит 30 с, пока поезд стоит, и 15 с, пока проезжает расстояние l – всего 45 с.

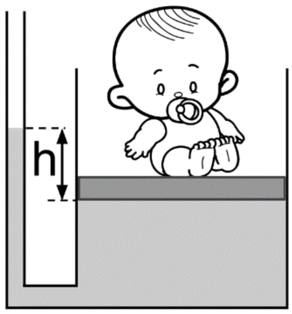
2. Поршень и дети

В школьной лаборатории стоял закрытый поршнем сосуд с водой, сообщающийся с открытой трубкой (см. рис), и Маша с помощью него «взвесила» своих братьев. Когда она поставила на поршень маленького Петю и измерила высоту подъема воды над поршнем, получила $h_1 = 10$ см, а когда Ваню $-$ получила $h_2 = 20$ см. Но когда она поставила на поршень сразу обоих братьев, то получила $h_3 = 28$ см.

А) Почему, когда братья вместе, высота подъема воды не просто складывается?

Б) Маша знает, что масса Пети $m_1 = 10$ кг. Чему равна масса Вани?

В) Найдите площадь поршня.



Ответ: А) см. решение. **Б)** 22,5 кг. **В)** $1250\text{ см}^2 = 0{,}125\text{ м}^2$.

Решение: А) Жидкость создает на поршень снизу избыточное давление (то есть на столько превосходящее атмосферное): $P = \rho g h$. Тем самым сила давления снизу на поршень, компенсирующая вес поршня с детьми $F = \rho g h S$, где S $-$ площадь поршня.

Причина того, что высóты подъема воды, а тем самым и уравновешиваемые давлением жидкости весá поршня с мальчиками не просто складываются, заключается в том, что поршень сам имеет вес. И его вес не складывается для 2-х мальчиков, а учитывается только один раз.

Б) Пусть массы Вани равна m_1 а поршня – M. Напишем равенство сил снизу и сверху для каждого из трёх случаев:

$\rho g h_1 S = Mg + m_1 g$ (1),

$\rho g h_2 S = Mg + m_2 g$ (2),

$\rho g h_3 S = Mg + m_1 g + m_2 g$ (3).

Сократим все уравнения на g. Вычитая из 3-го уравнения 1-е, получим:

$\rho h_3 S - \rho h_1 S = m_2$ (4).

Вычитая из 3-го уравнения 2-е, получим:
$\rho h_3 S - \rho h_2 S = m_1$ (5).
Наконец, поделив уравнение (4) на уравнение (5), получим:
$m_2/m_1 = (h_3 - h_1)/(h_3 - h_2) = (28 - 10)/(28 - 20) = 18/8 = 9/4$.
Откуда, зная массу Пети, считаем массу Вани $m_2 = \frac{9}{4} m_1 = 22{,}5$ кг.
В) Найдя массу Вани и вычитая из уравнения (2) уравнение (1) получим:
$\rho h_2 S - \rho h_1 S = m_2 - m_1$, откуда $S = \frac{m_2 - m_1}{\rho(h_2 - h_1)} = 1250\ \text{см}^2 = 0{,}125\ \text{м}^2$.
Примечание. Есть и другие способы решать систему уравнений (1), (2) и (3), позволяющие найти неизвестные m_2, S, а также массу поршня $M = 2{,}5$ кг.

3. Всплывающие шарики

У школьника есть 10 пронумерованных шариков, зависимость объема каждого от температуры задается формулой $V = V_0\left(1 + \frac{1}{10}T\right)$, где T – температура шарика $°C$, а $V_0 = 10\ \text{см}^3$ – его объем при температуре $0°C$. При этом, однако, у шариков разная плотность, и шарик с номером n всплывает в воде при температуре $T = n°C$. (1-й шарик всплывает при $T = T_1 = 1°C$, 2-й шарик при $T = T_2 = 2°C$ и т.д.)

А) Чему равняется при температуре $T_0 = 0^oC$ средняя плотность всех шариков? (Считайте, что плотность воды не зависит от температуры Т и равна $\rho_0 = 1\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$).

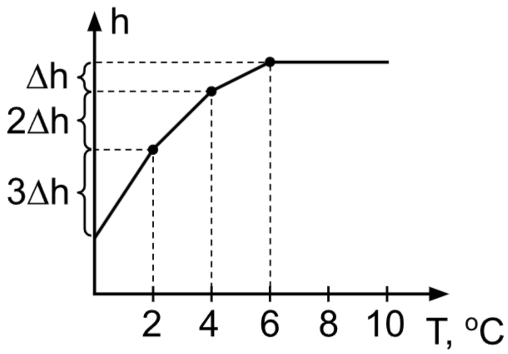
Б) Нарисуйте примерный график, как будет меняться уровень воды в стакане, в который положили шарики с номерами 2, 4 и 6, в зависимости от равномерно растущей, начиная с 0^oC, температуры. Ответ поясните.

Ответ: А) $1550\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. **Б)** см. решение.

Решение: А) При нагреве объем шариков увеличивается, а плотность уменьшается. В момент, когда плотность шарика становится равна плотности воды, он начинает всплывать. Тогда для шарика с номером n верно: $\frac{m_n}{V_0(1+0{,}1n)} = \rho_в$ или $m_n = \rho_в V_0(1 + 0{,}1n)$, где m_n – масса шарика с номером n, $\rho_в$ – плотность воды. По определению $\rho_{ср} = \frac{m_{общ}}{V_{общ}}$. В нашем случае

$$\rho_{ср} = \frac{\rho_в V_0(1 + 0{,}1\cdot 1) + \rho_в V_0(1 + 0{,}1\cdot 2) + \cdots + \rho_в V_0(1 + 0{,}1\cdot 10)}{V_0 + V_0 + \cdots + V_0} = \frac{\rho_в V_0(10 + 0{,}1 + 0{,}2 + \cdots + 1)}{10V_0} =$$
$$= \frac{\rho_в \cdot 15{,}5}{10} = 1550\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Б) Пока шарик находится под водой, справедливо утверждение $V_{выт} = V_0 \cdot 0{,}1T$, где $V_{выт}$ – объем вытесненной шариком воды по сравнению с начальным состоянием. Тогда $\Delta h = \frac{V_0 \cdot 0{,}1T}{S}$, где Δh – изменение уровня воды, вызванное расширением одного шарика. При $T = n°C$ шарик с номером n всплывает. Начиная с этого момента и до конца нагрева для него будет выполняться утверждение $F_A = F_T$ или $\rho_в g V_{погр} = m_n g$, откуда $V_{выт} = V_{погр} = \frac{m_n}{\rho_в}$. При нагреве эти величины не меняются, а значит уровень воды не будет меняться из-за дальнейшего расширения этого шарика. Получается, что от 0 °С до 2 °С будут вытеснять воду все 3 шарика: $\Delta h_{общ} = 3 \cdot \frac{V_0 \cdot 0{,}1T}{S}$, от 2 °С до 4 °С вытесняют воду 2 шарика: $\Delta h_{общ} = 2 \cdot \frac{V_0 \cdot 0{,}1T}{S}$, от 4 °С до 6 °С вытесняет воду только 1 шарик: $\Delta h_{общ} = 1 \cdot \frac{V_0 \cdot 0{,}1T}{S}$ и от 6 °С все 3 шарика будут плавать на поверхности воды и ее уровень не будет меняться.



4. Незнайкины кристаллы

Незнайка нашел в своем пруду кристаллы кубической формы из некоторого вещества. Он взял кристалл с ребром a, поднял его на поверхность, поставил на доску длиной $L = 4a$ и массой $m = 1$ кг, подпёр её камнем в точке края кристалла и уравновесил гирей тоже массой $m = 1$ кг (см. рис. 1).

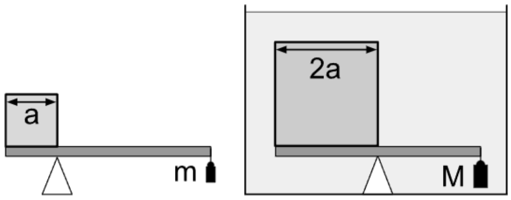


рис. 1 рис. 2

А) Найдите массу этого кристалла.

Б) Потом Незнайка увидел кристалл с ребром $2a$, но не смог поднять его на поверхность и потому уравновесил его прямо под водой с помощью той же доски и гири массой $M = 15$ кг (см. рис. 2). Найдите плотность кристаллов.

Если нужно: плотность воды $\rho_в = 1\,\frac{г}{см^3}$, доски $\rho_д = 0{,}6\,\frac{г}{см^3}$, гирь $\rho_г = 5\,\frac{г}{см^3}$.

Ответ: А) 8 кг. **Б)** 1,6 г/ см^3**.**

Решение: А) Напишем правило для равновесия рычага с маленьким кубом-кристаллом массы $М_к$ (см. рис.1). Сила тяжести куба приложена к его центру масс. Также можно считать и про силу тяжести самой доски-рычага, что она приложена к её середине. Тогда

$$M_к g\frac{a}{2} = mga + mg\cdot 3a \qquad (1)$$

Отсюда получаем $М_к = 8m = 8$ кг

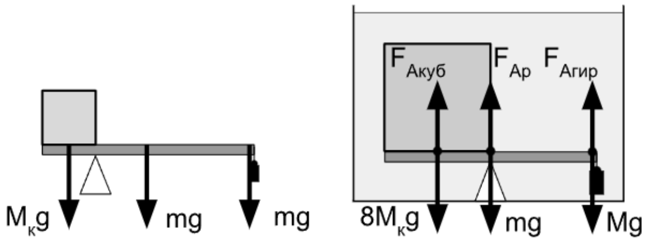


рис. 1 рис. 2

Б) При увеличении размера ребра куба-кристалла в 2 раза, его объем (а значит при той же плотности и масса) увеличились в $2^3 = 8$ раз. Кроме того, под водой на все объекты действует сила Архимеда. Напишем правило рычага в новом положении с учетом сил Архимеда (см. рис.2):

$$(8M_к g - F_{A_{куб}})a = \left(Mg - F_{A_{гир}}\right)2a. \qquad (2)$$

Силы, действующие на рычаг при записи моментов, не надо учитывать, т.к. они все приложены к середине доски и имеют нулевое плечо. Для кристалла: $F_{A_{куб}} = \rho V_к g = \rho\cdot 8M_к/\rho_к \cdot g$ или $F_{A_{куб}} = \rho/\rho_к\cdot 8M_к g$. Аналогично: $F_{A_{гир}} = \rho/\rho_г\cdot Mg$ (здесь ρ – плотность воды). Подставив силы Архимеда в уравнение (2), и сократив на a и на g получим: $8M_к\left(1-\frac{\rho}{\rho_к}\right) = 2M\left(1-\frac{\rho}{\rho_г}\right)$.

Подставляя значения масс, из этого уравнения найдем неизвестную плотность кристалла:

$$64\left(1-\frac{\rho}{\rho_к}\right) = 30\left(1-\frac{\rho}{\rho_г}\right) \Rightarrow \rho_к = \frac{32\rho\rho_г}{17\rho_г+15\rho} = 1{,}6\ \text{г/ см}^3.$$