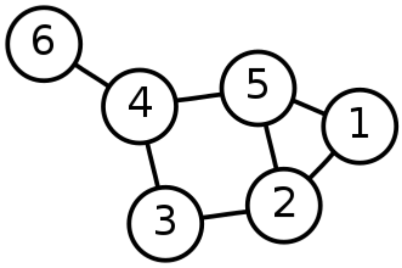
Не очень краткий конспект по теории графов

Как вы знаете, математика, как самая абстрактная из наук, даже если и не является царицей, то, по крайней мере, дает весь инструментарий остальным наукам. Поэтому все развитие математики так или иначе было связано с необходимостью новых инструментов для развития других наук. Примером такого развития и является теория графов.

Основателем теории графов считается Леонард Эйлер. Именно он в середине XVIII века впервые сформулировал знаменитую задачу о Кенигсбергских мостах, о которой мы с вами позднее поговорим.

Что же такое граф? Графом G будем называть пару множеств $\langle V, E \rangle$, где V – это множество вершин, а E – множество ребер.



Что же это значит по-русски? Хоть графы и являются абстрактной математической моделью, их можно представить просто как некий набор точек на плоскости, которые будем называть вершинами, и «линий», их соединяющих, которые будем называть ребрами.

В принципе, на этом определение графа и заканчивается, однако можно ввести множество дополнительных условий и ограничений, уточняя определение. Будем называть классическим такой граф, в котором выполнено несколько условий:

- каждое ребро соединяет ровно две вершины;
- между любыми двумя вершинами проведено не более одного ребра (иными словами, нет кратных ребер);
- нет петель – ребер, начинающихся и заканчивающихся в одной и той же вершине;
- нет тупиков – ребер, имеющих только начало и не имеющих конца.

Если какой-либо из пунктов (за исключением первого) не выполнен, то такой граф будем называть псевдографом.

Раздел, изучающий классические графы, называется классической теорией графов. Именно с ней мы с вами и познакомимся.

Упражнение 1. Между городами Таинственной страны есть следующие авиарейсы: $\text{А} - \text{К}, \text{М} - \text{Т}, \text{М} - \text{Я}, \text{А} - \text{Б}, \text{Я} - \text{Т}, \text{А} - \text{С}, \text{Б} - \text{С}, \text{М} - \text{Ш}, \text{Ш} - \text{Т}, \text{Я} - \text{Ф}, \text{Ф} - \text{Г}, \text{К} - \text{З}$ (каждый рейс в обе стороны).

А) Можно ли из А перелететь в Я?

Б) Сколько в стране городов (включая М), в которые можно попасть из М не более чем с одной пересадкой?

Идея №1. Для использования теории графов при решении задач необходимо сперва ввести сам граф, с которым вы будете далее работать – то есть, четко сформулировать, что есть вершины, а что ребра!

Для работы с графами – будь то изучение их свойств, или какое-либо сравнение – нам потребуется числовая характеристика. Проще всего ввести таковую оказывается для вершин графа.

Степенью вершины будем называть количество ребер, соединенных с этой вершиной.

Идея №2. Степень вершины – или натуральное число, или 0.
Идея №3. Если степень вершины равна 0, то такая вершина называется изолированной.
Идея №4. В классическом графе степень вершины всегда меньше количества вершин графа.

Из идеи №4 при помощи принципа Дирихле можно вывести следующую теорему.
Теорема (об одинаковых степенях). В любом графе всегда найдутся хотя бы две вершины с одинаковой степенью.

Упражнение 2. Докажите эту теорему.

Раз степень вершины – это количество ребер, выходящих из нее, то получается, что каждое ребро увеличивает степень двух вершин. Эта мысль приводит нас к первому важному факту теории графов, исторически известному как…
Лемма о рукопожатиях. Сумма степеней всех вершин графа четна.
Доказательство. Степень вершины – это количество выходящих из нее ребер. Тогда сумма степеней всех вершин – это количество концов ребер, которых у каждого по две шутки, чтд.

Идея №4. Леммой называют маленькую «под-теорему», доказываемую в рамках большей теоремы.
Идея №5. Нетрудно заметить, что при наличии в графе тупиков эта лемма перестает работать. Поэтому здесь и далее будем подозревать, что под словом «граф» мы подразумеваем именно классический граф.

К какой же теореме тогда относится эта лемма?
Теорема (о сумме степеней вершин). Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу его ребер.
Из этой теоремы также оказывается полезно вывести…
Следствие: количество вершин с нечетной степенью – четно.

Идея №6. Эта теорема работает только в одну сторону! Если сумма степеней вершин графа четна, это еще не означает, что такой граф действительно существует.

Упражнение 3. Существуют ли на свете графы, степени вершин которых равны
А) $1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3$; Б) $1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3$;
В) $4, 4, 4, 4, 4$; Г) $4, 4, 4, 2, 2$; Д) $4, 4, 4, 2$?

Идея №7. Полным графом (или кликой) называют граф, в котором проведены все возможные ребра, или, иными словами, степень каждой вершины максимальна. Полный граф обозначают K_n, где n – количество вершин.
Идея №8. В графе с n вершин не может быть больше ребер, чем в соответствующем полном графе.

Упражнение 4. Сколько ребер в K_n?

Идея №9. Пустым графом (или нуль-графом) называют граф, в котором нет ни одного ребра, или, иными словами, степени всех вершин равны 0.

Зачем вообще изначально вводили графы? Для решения различных задач о способах добраться из пункта А в пункт Б по имеющимся дорогам.

Будем называть путем в графе последовательность смежных ребер, позволяющую добраться из одной вершины до другой.

Идея №10. Смежными называют ребра, имеющие общую вершину.

Если же начало и конец пути совпали, то такой путь называют циклическим.

Заметьте, что больше никаких ограничений ни на вершины, ни на ребра не накладывают при определении пути и цикла, что оказывается не очень удобно, ведь тогда любой путь можно сделать бесконечно длинным, просто путешествуя по одному ребру туда и обратно. Поэтому также вводят понятия цепи и цикла: таких пути и циклического пути, что каждое ребро встречается не более одного раза.

Идея №11. Можно также потребовать, чтобы и вершины встречались в цепи не более одного раза. Такую цепь называют простой цепью. Аналогично вводят и простой цикл.
Идея №12. Здесь очень важно понимать, что, хоть теории графов уже вот-вот стукнет 300 лет, терминология до сих пор не совсем устоялась. Так, иногда путь называют маршрутом, а цепь – путем :) Поэтому, для простоты, давайте просто договоримся, что под «путем» будем понимать цепь.

Давайте вновь вернемся к первому упражнению и вспомним, как решался пункт А. Там оказалось, что вершины А и М расположены в различных «частях» графа, между собой никак не связанных. Иными словами, не существует пути между этими двумя вершинами.

Граф называют связным, если между любыми двумя его вершинами есть путь. В противном случае граф называют несвязным.

Идея №13. Несвязность графа никак не влияет на все ранее озвученные идеи и теоремы.

То есть, в упражнении 1 мы просто столкнулись с несвязным графом, в котором есть две отдельные «связные части».

Компонентой связности несвязного графа называют такой его подграф, в котором есть путь между любыми двумя его вершинами и нет пути до любой из вершин, в этот подграф не вошедших. Иными словами, если есть вершина x, из которой можно добраться до вершины y, входящей в компоненту связности G_1, то и вершина x принадлежит этой компоненте.

Идея №14. Слово «компонента» женского рода! Считайте, что так исторически сложилось…
Идея №15. Подграфом называют часть графа G, в которую входят некоторые вершины этого графа и некоторые из его ребер, проходящих между выбранными вершинами.
Идея №16. Изолированная вершина является компонентой связности.
Идея №17. Каждая компонента связности является связным подграфом, поэтому все дальнейшие идеи и теоремы, верные для связных графов, верны и для каждой компоненты связности несвязного графа.

Упражнение 5. В стране 101 город, причем из каждого города ведет дорога хотя бы в 51 другой город. Докажите, что из столицы ABC можно добраться в центр отдаленной провинции XYZ.

Также в теории графов очень часто рассматривают их «устойчивость» – насколько изменятся свойства графа при, например, удалении ребра. В применении к нашей реальности это можно интерпретировать так: «Насколько ухудшится городской трафик, если закрыть одну улицу на ремонт?»

Мостом графа называют такое его ребро, при удалении которого увеличивается количество компонент связности.

Идея №18. Мост не входит ни в один цикл.

В идее №8 мы сформулировали максимум количества ребер в графе из n вершин. Аналогичное количество можно получить и для несвязного графа из n вершин.

Упражнение 6. Когда-то в Санкт-Петербурге было всего 12 станций метро, между которыми было построено 56 перегонов. Можно ли было добраться от одной станции до любой другой, не выходя на поверхность?

Теорема (о максимальном количестве ребер несвязного графа). Если граф из n вершин несвязен, то ребер в нем не более чем $(n-1)(n-2)/2$.

Доказательство. Кажется очевидным, что наибольшее количество ребер в несвязном графе из n вершин будет тогда, когда в нем есть одна изолированная вершина, а все остальные образуют полный подграф, и в таком случае количество ребер действительно будет равно $(n-1)(n-2)/2$. Однако это утверждение, на самом деле, отнюдь не очевидно и требует аккуратного рассмотрения.
Пусть в этом графе есть две компоненты, в одной из которых k вершин, а в другой – $n-k$, и, для удобства, $k \leq n-k$. Тогда давайте переместим одну вершину из первой компоненты во вторую и проследим, как изменится общее количество ребер E: $E \rightarrow E-k+(n-k)$, что точно больше чем E. Таким образом, уменьшение количества вершин в меньшей компоненте приводит к увеличению общего числа ребер.
А вот теперь мы честно можем заявить, что этот процесс перемещения вершин закончится, когда в меньшей компоненте останется всего одна вершина. Значит действительно, максимальное количество ребер в несвязном графе равно $(n-1)(n-2)/2$, чтд.

Идея №19. Надо признаться, что мы немного слукавили и неполностью доказали последнюю теорему, ведь мы рассмотрели только тот случай, когда в графе ровно две компоненты. Попробуйте самостоятельно придумать, как обобщить наше частичное доказательство на произвольное количество компонент связности.

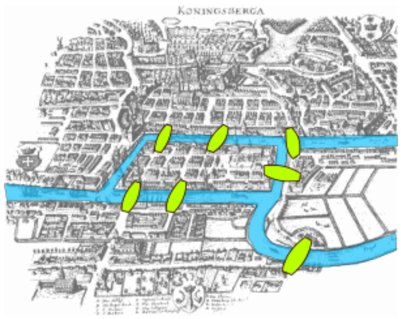
Немного отвлечемся от основного «курса» и введем еще понятие двудольного графа – то есть графа, в котором все вершины можно разбить на две группы так, что ребра соединяют только вершины из разных групп. И для двудольного графа тоже можно вычислить максимальное количество ребер!

Идея №20. В двудольном графе максимальное количество ребер равно $k \cdot m$, где k и m – количество вершин в долях.

Упражнение 7. Каждый из участников олимпиады решил различное число задач, и каждая из задач была решена различным числом участников. Докажите, что существует школьник, решивший ровно одну задачу.

Для двудольного графа можно вывести соответствующую теорему существования.
Теорема (о двудольности графа). Граф является двудольным, если все его циклы имеют четную длину.

Но мы отвлеклись. Теперь, введя понятия пути и цикла, мы можем вернуться к упомянутой в самом начале знаменитой задаче о Кенигсбергских мостах, сформулированной Леонардом Эйлером в 1736 году.



Упражнение 8. Издавна среди жителей Кенигсберга была распространена такая загадка: как пройти по всем городским мостам (через реку Преголя), не проходя ни по одному из них дважды?

Для решения этой задачи давайте переведем ее на язык графов. Острова здесь будут вершинами, а мосты – ребрами. Тогда как переформулируется сам вопрос задачи?

Упражнение 8'. Дан псевдограф без петель, как на рисунке. Существует ли в нем путь, проходящий по всем ребрам графа единожды?

Эйлеровым путем называется такой путь в графе, проходящий через каждое ребро графа ровно один раз. Аналогично вводится понятие эйлерова цикла.
Если в графе существует эйлеров путь или цикл, то такой граф называют эйлеровым (или уникурсальным).

Идея №21 (продолжение идеи №12). Оказывается, и тут не все гладко – иногда эйлеровым называют только тот граф, в котором есть эйлеров цикл. Если же в графе есть эйлеров путь, то такой граф иногда называют полуэйлеровым.

Итак, если граф уникурсален, то по всем его ребрам можно пройти, посещая каждое ровно один раз. Ничего не напоминает? Это задачи вида «Нарисуйте картинку, не отрывая карандаша от бумаги».

Идея №22. Важно понимать, что хоть формальное определение эйлерова графа и не требует его связности, в случае несвязного графа речь идет о существовании соответствующих пути или цикла в каждой компоненте по отдельности, и об «неотрывании карандаша» речи уже не идет.

Но когда граф является эйлеровым? Оказывается, что, хоть само ограничение на путь и очень сильное, проверка существования такого пути весьма проста.

Пусть в графе нашелся эйлеров путь. Давайте рассмотрим какую-нибудь из его внутренних вершин. По какому-то одному ребру мы в нее зашли, и по какому-то другому – вышли. Тем самым получается, что однократное посещение одной вершины «удаляет» два ребра. Что тогда можно сказать о степени данной вершины? Действительно, она должна быть четной! А что происходит у крайних (или конечных) вершин? Действительно, у них степень должна быть нечетной.

Теорема (об эйлеровом пути). Если в графе есть эйлеров путь, в нем ровно две нечетных вершины (то есть вершины с нечетной степенью).

А что меняется в случае наличия эйлерова цикла? Действительно, крайние вершины совпадают, а значит, и у нее степень тоже четная.

Теорема (об эйлеровом цикле). Если в графе есть эйлеров цикл, в нем все вершины – четные.

А можно ли как-то объединить эти две теоремы в одну теорему про эйлеров граф?

Теорема (об эйлеровом графе). Граф является эйлеровым, если в нем не более двух нечетных вершин.

Идея №23. В графе не может быть одной нечетной вершины!

Упражнение 9. Имеется группа островов, соединенных мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошел все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист:
А) не с него начал и не нем закончил;
Б) с него начал, но не на нем закончил;
В) с него начал и на нем закончил.

Идея №24. В любом связном графе существует путь, проходящий по каждому ребру графа ровно два раза.

Снова немного отвлечемся. Также, как эйлеров граф является ужесточением понятий цепь и цикл, можно ужесточить и введенные в идее №11 понятия простых цепи и цикла.

Будем называть путь гамильтоновым, если в нем встречается каждая вершина графа ровно один раз. Аналогично вводятся гамильтоновы цикл и граф.

Однако для гамильтонова графа найти и доказать соответствующую теорему оказалось гораздо сложнее и было сделано менее 50 лет назад. Мы даже формулировать ее не будем, вот настолько она сложна.

Но вернемся к основному курсу. Разобравшись с понятиями пути и цикла, давайте вернемся к идеям из упражнений 4 и 6 о количественных оценках максимального количества ребер. Напомним, что максимум ребер в графе из n вершин равен $n \cdot (n-1)/2$, а максимум ребер в несвязном графе из n вершин – $(n-1)(n-2)/2$. А можно ли оценить минимальное количество ребер?

Очевидно, что минимально возможное число ребер в любом графе равно 0. Однако если потребовать от графа связности, минимум будет явно не 0.

Деревом называют связный граф без циклов.

Идея №25. Вообще существует три эквивалентных определения дерева: «связный граф без циклов», «связный граф, в котором каждое ребро – мост» и «связный граф, в котором между любыми двумя вершинами существует единственный путь». Докажите их эквивалентность самостоятельно.

Упражнение 10. Перечислите все пятивершинные деревья.

Из этого упражнения нетрудно заметить, что во всех таких деревьях ровно 4 ребра.

Теорема (о количестве ребер в дереве). Если граф из n вершин является деревом, в нем ровно $n-1$ ребро.

Из одного из определений дерева, данного в идее №24, можно сделать следующее следствие: минимальное количество ребер в связном графе достигается тогда, когда этот граф – дерево.

Очень часто оказывается полезным выделить из связного графа связный подграф, содержащий все его вершины, с минимальным количеством ребер (иными словами, убрать из графа все лишние ребра и сделать его деревом). Такой подграф называют остовом или скелетом или остовным деревом графа.

Упражнение 11. Хулиган Дима режет веревочную волейбольную сетку 4×5 не в узлах. После какого количества разрезов сетка заведомо распадется на части?

Очевидно, что в дереве всегда найдется вершина степени 1. Такую вершину называют висячей или просто листом.

Идея №26. Более того, в дереве всегда существует не менее двух висячих вершин.

А что, если граф несвязен, но в нем тоже нет циклов? Тогда получается, что каждая его компонента связности является деревом. А весь граф тогда называют лесом.

Идея №27. В лесе из n вершин и k компонент связности ровно $n-k$ ребер.